Komplexe Zahlen

Aufgabe 1

(a) $z_1 \cdot z_2 + 5 = (1+3i) \cdot (2-i) + 5$

$= 2 - i + 6i + (3i) \cdot (-i) + 5$

$= 2 + 5i - 3 \cdot i^2 + 5 = 2 + 3 + 5 + 5i$

$= \underline{\underline{10 + 5i}}$

(b) $\dfrac{z_1^2}{z_2} = \dfrac{(1+3i)^2}{2+i} = \dfrac{(1+3i)^2 \cdot (2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$= \dfrac{(1 + 6i + 9 \cdot i^2)(2-i)}{4 + 2i - 2i - i^2} = \dfrac{(-8 + 6i) \cdot (2-i)}{4+1}$

$= \dfrac{-16 + 8i + 12i - 6i^2}{5} = \dfrac{-10 + 20i}{5}$

$= \underline{\underline{-2 + 4i}}$

(c) $z_2 \cdot i^{10} = (2-i)\, i^{10} = (2-i) \cdot (i^2)^5$

$= (2-i) \cdot (-1)^5$

$= (2-i) \cdot (-1) = \underline{\underline{-2 + i}}$

Aufgabe 2

$$4z^2 - 6z + 5 = 2z$$

$$\Leftrightarrow \quad 4z^2 - 8z + 5$$

$$z_{1,2} = \frac{+8 \pm \sqrt{64-80}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{8}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{-1}\sqrt{16}}{8} = \frac{8 \pm i4}{8}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}i, \quad 1 - \tfrac{1}{2}i$$

$$\mathbb{L} = \{1 + \tfrac{1}{2}i, \; 1 - \tfrac{1}{2}i\}$$

Aufgabe 4

$$z^4 = \left(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi \cdot i}\right)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 \cdot \left(e^{3/4\pi \cdot i}\right)^8$$

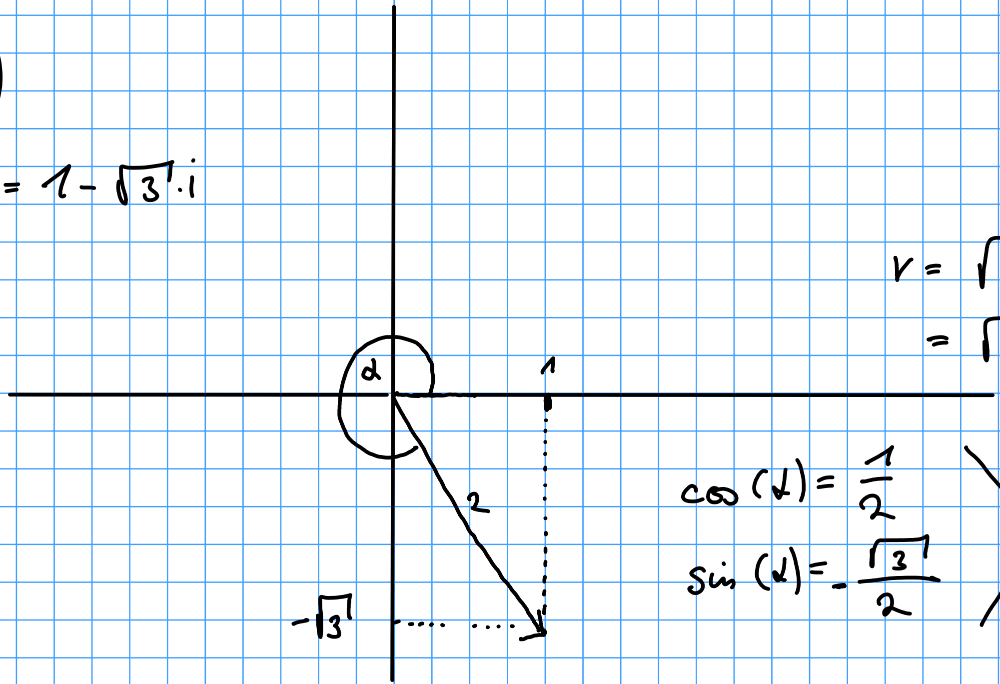
$$= \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^4 \cdot e^{3/4\pi \cdot i \cdot 8} = 2^4 \cdot e^{3 \cdot \pi \cdot i \cdot 2}$$

$$= 16 \cdot e^{6\pi i} \underset{\uparrow}{=} 16$$

$$6\pi = 3 \cdot 2\pi \mathrel{\hat{=}} 3 \cdot 360°$$

(b)

$w = 1 - \sqrt{3} \cdot i$



$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{4} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \alpha = -\pi/3 \hat{=} 60^\circ$

oder $\alpha = \arctan(-\sqrt{3})$
$= -\pi/3$

Also $w = 2 \cdot e^{-\pi/3 \, i}$

$\Rightarrow \quad w^9 = 2^9 \cdot e^{-\pi/3 \cdot i \cdot 9}$

$= 512 \cdot e^{-\pi \cdot i \cdot 3}$

$= 512 \cdot (-1) = \underline{\underline{-512}}$

Aufgabe 5

Hintergrund: Mit Hilfe komplexer Zahlen kann die Berechnung von Wechselstromnetzwerken auf die Berechusmethoden von Gleichstromnetzwerken reduziert werden. Beispielsweise kan für sinusförmige Spannungen und Ströme

$$u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t) \quad , \quad i(t) = i_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

das Ohmsche Gesetz $R = \frac{u}{i}$ nicht verwendet werden, da $i(t)$ den Wert 0 annimmt und der Quotient $\frac{u}{i}$, falls definiert, nicht konstant ist.

In der komplexen Wechselstromrechnung ersetzt man die sinusförmigen Spannungen und Ströme durch komplexe Drehzeiger

$$u_c(t) = u_0 \cdot e^{j\omega t} \qquad i_c(t) = i_0 \cdot e^{(\omega t + \varphi) j}$$

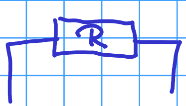
Der Begriff des Widerstands wird durch die Impedanz ersetzt:

$$Z_c = R + j \cdot X$$

mit dem sogenannten Wirkwiderstand R und dem Blindwiderstand X

Beispielsweise im Wechselstromkreis mit Frequenz f und $\omega = 2\pi f$:

ohmscher Widerstand



$$Z_c = R + j \cdot 0$$

ideale Spule

$$Z_c = 0 + j\omega L$$

Kondensator

$$Z_c = 0 - j \cdot \frac{1}{\omega C}$$

Mit Impedanz Z_c, Spannung u_c und Strom i_c gelten dann das Ohmsche Gesetz

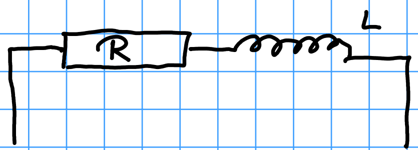
$$\boxed{u_c = Z_c \cdot i_c}$$

und die Regeln für Serien/Parallelschaltungen wie in Gleichstromnetzwerken

---

(a) $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) = 10 \cdot \sin(\omega t)$ mit $\omega = 2\pi \cdot 50 = 100\pi$

$\Rightarrow u_c(t) = 10 \cdot e^{j\omega t}$



Serienschaltung $\Rightarrow$ $Z_c = R + 0j + 0 + j \cdot \omega \cdot L$

$$= R + j \cdot \omega \cdot L = 2 + j \cdot \omega \cdot 40 \cdot 10^{-3}$$

$$= 2 + j \cdot \frac{40\omega}{1000}$$

Stromberechnung:

$$u_c = Z_c \cdot i_c \Rightarrow i_c = \frac{u_c}{Z_c} = \frac{10 \cdot e^{j\omega t}}{2 + j \cdot \frac{40\omega}{1000}} \qquad \omega = 100\pi$$

Polarschreibweise von Z_c:

$$r = \sqrt{2^2 + \left(\frac{40\omega}{1000}\right)^2} = \sqrt{4 + (4\pi)^2} \approx 12{,}72$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4\pi}{2}\right) \approx 1{,}41$$

$$\Rightarrow Z_c \approx 12{,}72 \cdot e^{1{,}41j}$$

Also $i_c(t) = \frac{u_c(t)}{Z_c(t)} \approx \frac{10 \cdot e^{j\omega t}}{12{,}72 \cdot e^{1{,}41j}} \approx 0{,}79 \cdot e^{j(\omega t - 1{,}41)}$

Damit:

$$i(t) = \underline{\underline{0{,}79 \cdot \sin(\omega t - 1{,}41)}}$$

(b) Phasenverschiebung in Grad

$$\varphi \approx 1{,}41 \mathrel{\hat{\approx}} 81^\circ$$