K2.2 Gleichungen

Ein Ausdruck der Form

$$f(x) = g(x) \quad \text{heißt Gleichung} \quad \text{z.B. } x^2+1 = 2x$$

mit Def. bereich $D = D_f \cap D_g$

und Lösungsmenge $L = \{x \in D \mid f(x) = g(x)\}$

Bsp.

(1) $x^2+1 = 2x$ „quadratische GL"

$D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$x^2+1 = 2x \quad | -2x$$

$$x^2-2x+1 = 0$$

$\Leftrightarrow$ Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ $L = \{1\}$

$$\boxed{\text{Allg.} \quad ax^2+bx+c = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

„Mitternachtsformel"

Äquivalenzumformungen

Umformungen einer Gl. bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert.

Gegenbsp.:

(1) $x = 2 \mid (\,)^2 \Rightarrow x^2 = 4$

$D = \mathbb{R}$ $\qquad$ $D = \mathbb{R}$

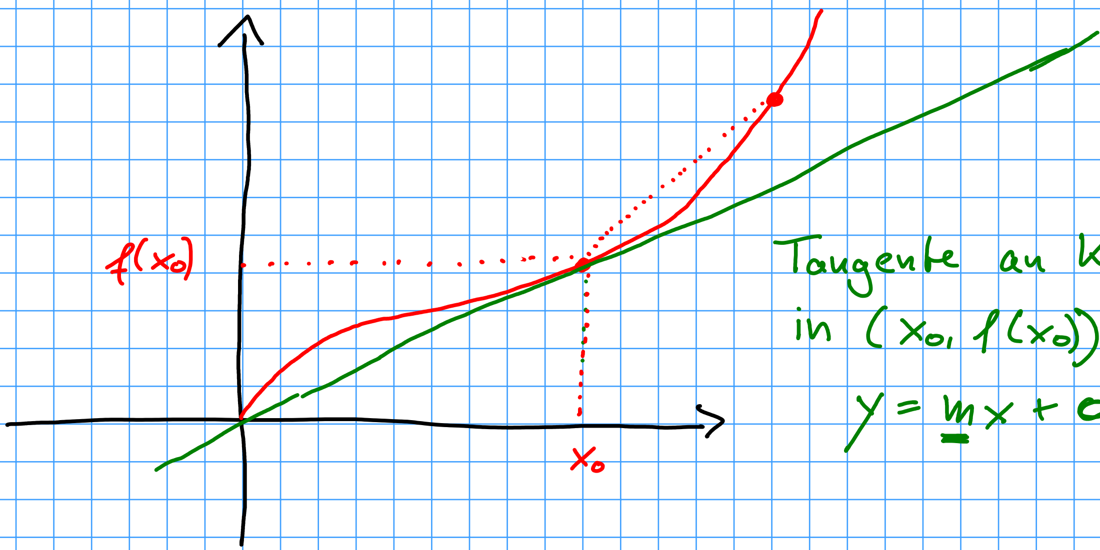
$L = \{2\}$ $\qquad$ $L = \{-2, 2\}$

Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung
Wurzelziehen ist keine Äquivalenzumformung
Multiplizieren mit 0 ist keine Äquivalenzumformung

② siehe Übungen + Musterlösung (HA)

K3.1 Differentialrechnung

Gegeben $f: D_f \to \mathbb{R}$



Tangente an Kurve in $(x_0, f(x_0))$

$y = \underline{m}x + c$

$f'(x_0) := m$ = „Steigung der Tangente an die Kurve in $(x_0, f(x_0))$"

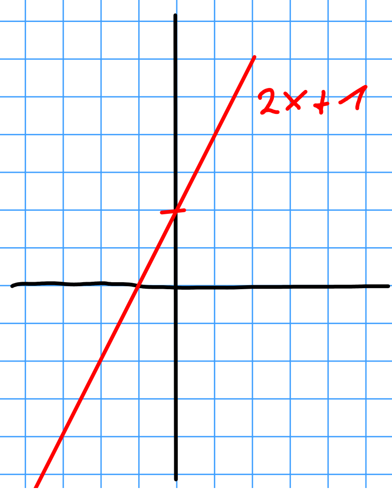
auch $\frac{d}{dx} f(x_0)$

Bsp: $f(x) = 2x + 1$

hat Steigung / Ableitung $= 2$

über all

$f'(x) = 2$



Standard Fkt

$f(x)$	$f'(x)$	
$mx + c$	m	Bsp. $(2x+1)' = 2$
$x^n,\ n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$n \cdot x^{n-1}$	Bsp $(x^3)' = 3 \cdot x^2$, $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
e^x	e^x	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$[\ln(a) = b \Leftrightarrow e^b = a]$
c, c = konstante $\in \mathbb{R}$	0	

Wie berechne ich Ableitungen von beliebigen Fkt. ?

Linearität

$$(a \cdot f)' = a \cdot f' \qquad a \in \mathbb{R},\ f \text{ Fkt}$$

z.B. $(3 \cdot x^5)' = 3 \cdot (x^5)' = 3 \cdot 5 \cdot x^4 = 15x^4$

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2', \qquad f_1, f_2 \text{ Fkt.}$$

z.B. $(3x^5 + 2x^4)' = (3x^5)' + (2x^4)' = 15x^4 + 8x^3$

Was ist mit $f_1 \cdot f_2$?

Produktregel

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \qquad f, g \text{ Fkt}$$

z.B. $(x^2 \cdot \cos(x))' = (x^2)' \cdot \cos(x) + x^2 \cdot (\cos(x))' = 2x\cos(x) + x^2 \cdot (-\sin(x))$

Was ist $\sin(x^2)$?

Kettenregel

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$ „äußere Ableitung · innere Ableitung"

z.B

$\sin(x^2)$ mit $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^2$

$f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = 2x$

$$\sin(x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Was ist mit $\frac{f}{g}$?

Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

z.B.

$$\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos(x)^2}$$

$$= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos(x)^2}}}$$

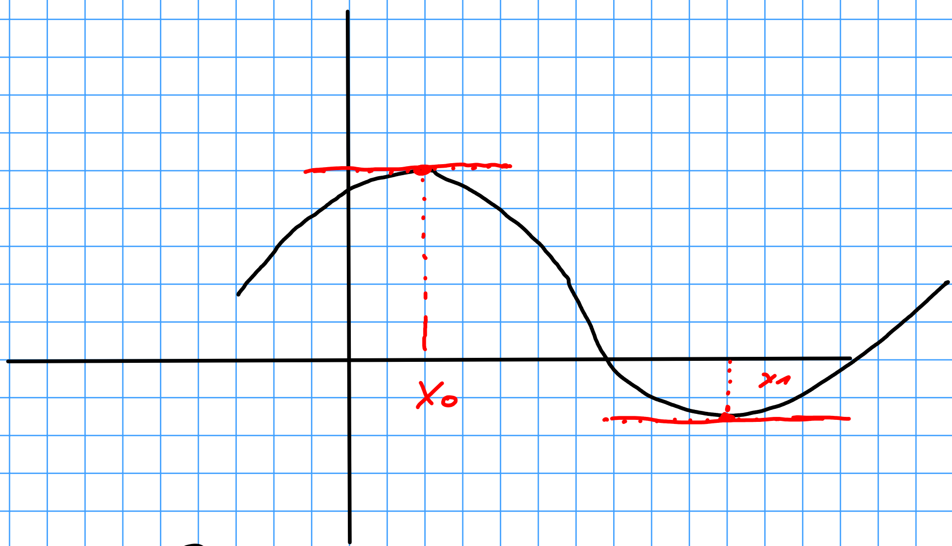
Mehrfache Ableitungen

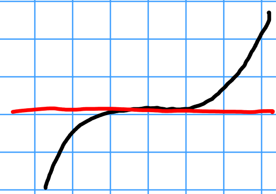
$f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$ ... usw. $f^{(50)} = (f^{(49)})'$

Bsp: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $f'''(x) = 0$

K3.2 Extremwerte, Kurvendiskussion und Taylorreihen

Extremwerte





Sei $f: D_f \to \mathbb{R}$. Ein Wert $x_0 \in D_f$ mit $f'(x_0) = 0$
heißt Extremwert von f
Extremstelle

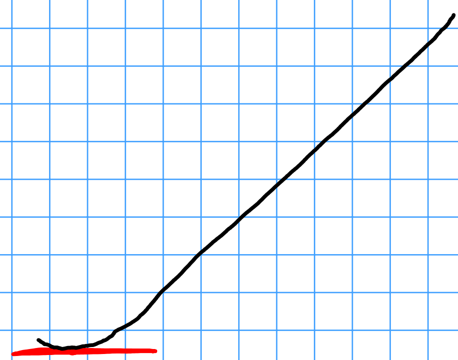
Satz: x_0 Extremwert von f mit

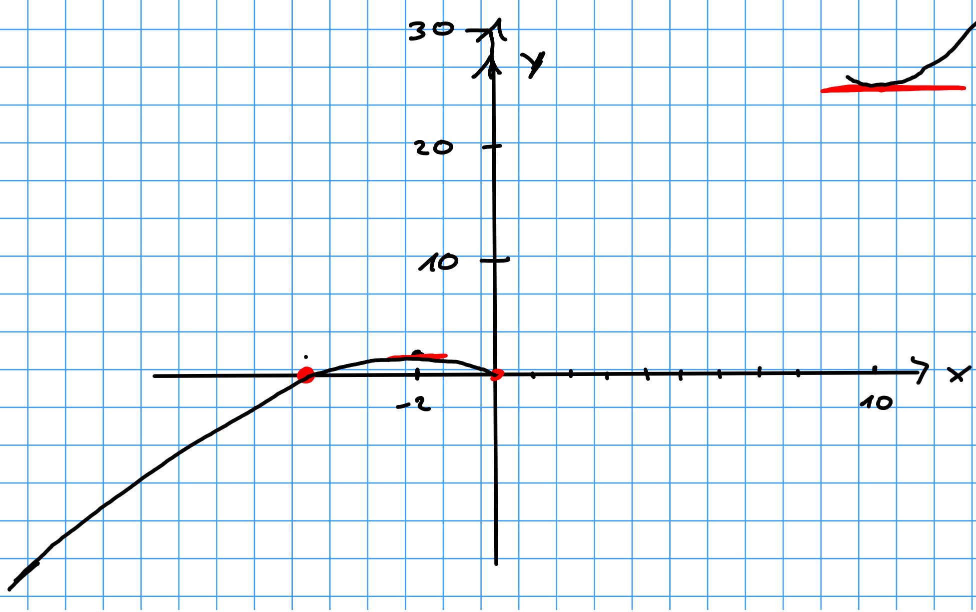
$f''(x_0) < 0$ dann x_0 lok. Max

$f''(x_0) > 0$ dann x_0 lok. Min

Kurvendiskussion

Skizziere $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x - 4}$





Nullstellen

$$f(x)=0 \iff \frac{x^2+5x}{x-4} = 0$$

$$\iff x^2+5x = 0$$

$$\iff x\cdot(x+5) = 0$$

$$\iff x=0 \quad \text{oder} \quad x=-5$$

Nst $(0,0)$, $(-5,0)$

Extremwerte:

$$f'(x) = \text{... Quotientenregel ...} = \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) \overset{!}{=} 0$$

$$\iff x^2-8x-20 = 0$$

$$\iff x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+80}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{144}}{2} = \frac{8\pm 12}{2}$$

$$= -2 / 10$$

Extremstellen

$$(-2, f(-2)) = (-2, 1)$$

$$(10, f(10)) = (10, 25)$$

Verhalten für $x \to \pm\infty$

$x \to -\infty$

$$\frac{x^2+5x}{x-4} = \frac{x^{\cancel{2}}(1+\frac{5}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{4}{x})} = x\cdot\frac{(1+5/x)}{(1-\frac{4}{x})}$$

$\to 1$ $\to 0$ $\to 0$

$\to -\infty$

$x \to \infty$

$$\frac{x^2+5x}{x-4} = \frac{x^2(1+\frac{5}{x})}{x(1-\frac{4}{x})} = x\cdot\frac{(1+5/x)}{(1-\frac{4}{x})}$$

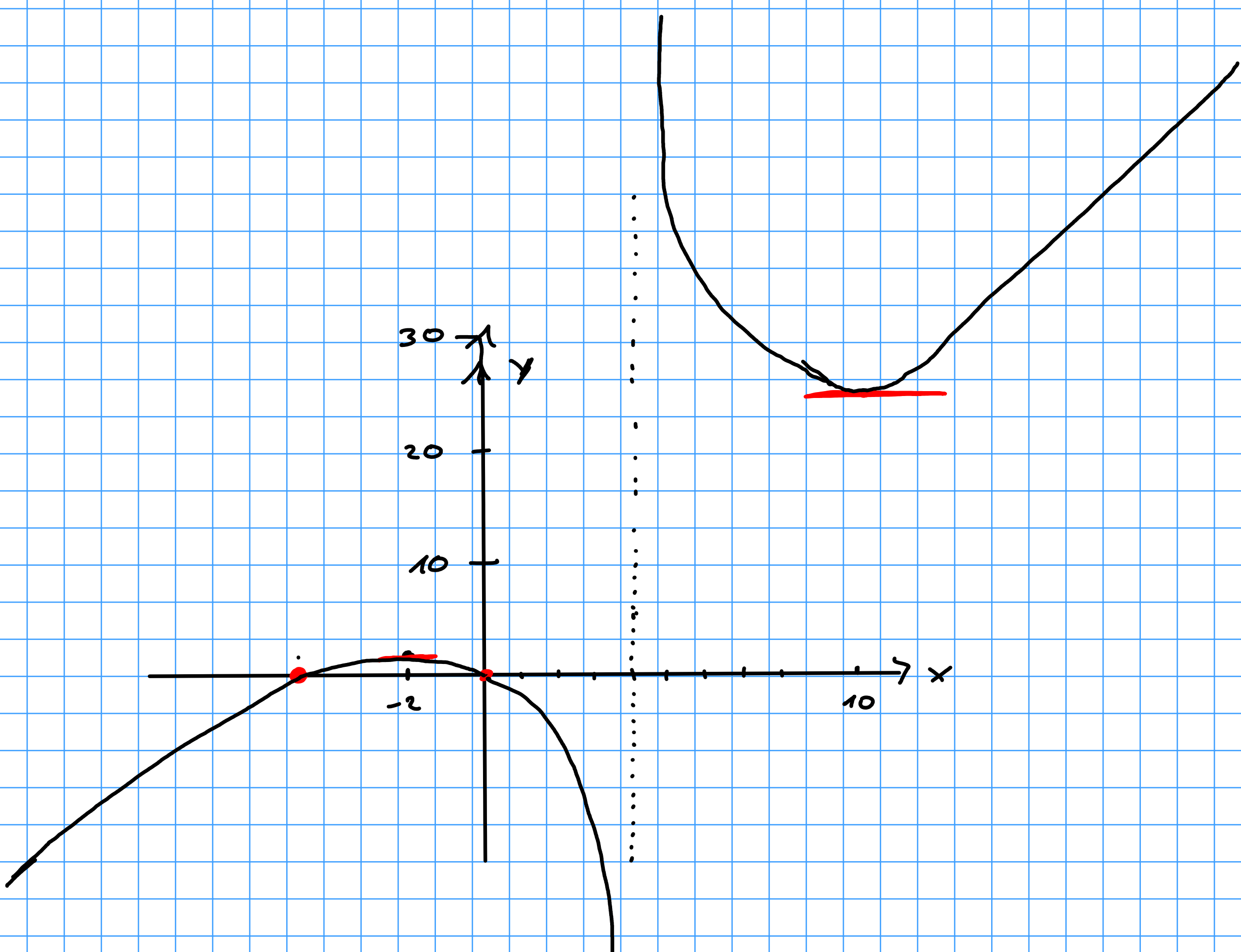
$\to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+5x}{x-4} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+5x}{x-}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+5x}{x-4} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+5x}{x-4} = -\infty$$



Pol der Funktion $x = 4$

$x \to 4$ von links $\quad \dfrac{\overbrace{x^2+5x}^{>0}}{\underbrace{x-4}_{<0}} \to -\infty$

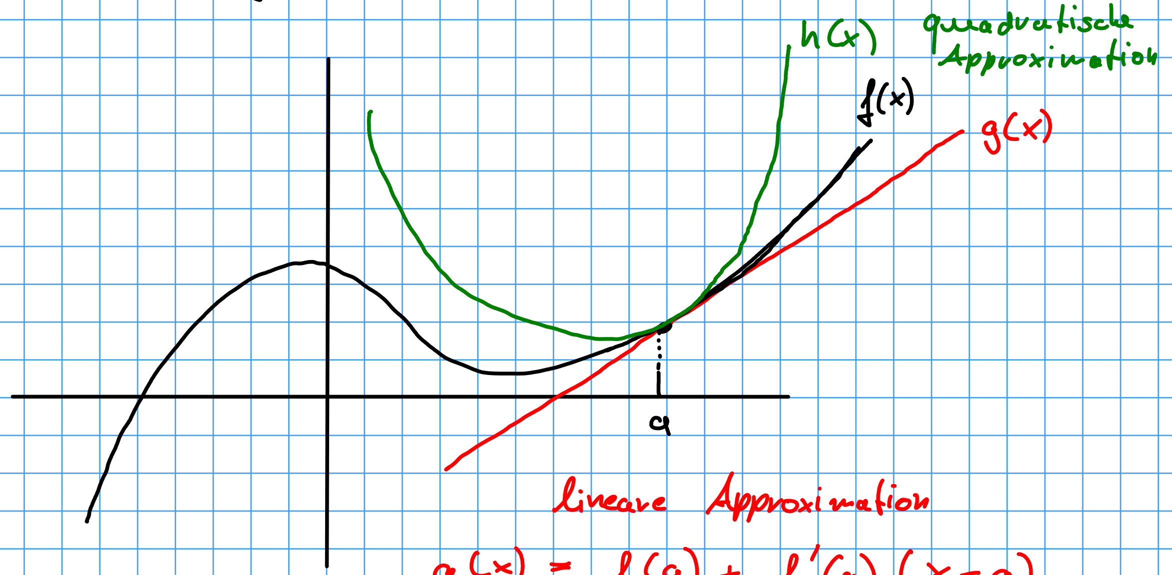
$x \to 4$ von rechts $\quad \dfrac{\overbrace{x^2+5x}^{>0}}{(x-4) > 0} \to \infty$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$$

Taylorreihen

f Funktion, $a \in D_f$



$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$h(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Approximation Ordnung n an $x=a$

$\Leftrightarrow$ Polynom $T_{n,a}(x)$ mit

$$T_{n,a}(a) = f(a)$$
$$T'_{n,a}(a) = f'(a)$$
$$f''_{n,a}(x) = f''(a)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}_{n,a}(x) = f^{(n)}(a)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n}$$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

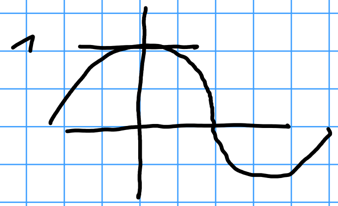
Für viele Fkt und x in der Nähe von a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(Taylorreihe)

(Potenzreihenentwicklung)

Bsp:



$f(x) = \cos(x)$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin(x)$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(x)$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin(x)$ $\qquad f'''(0) = 0$

$$T_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)\cdot(x-0) + \frac{f''(0)}{2}\cdot(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3\cdot 2}(x-0)^3$$

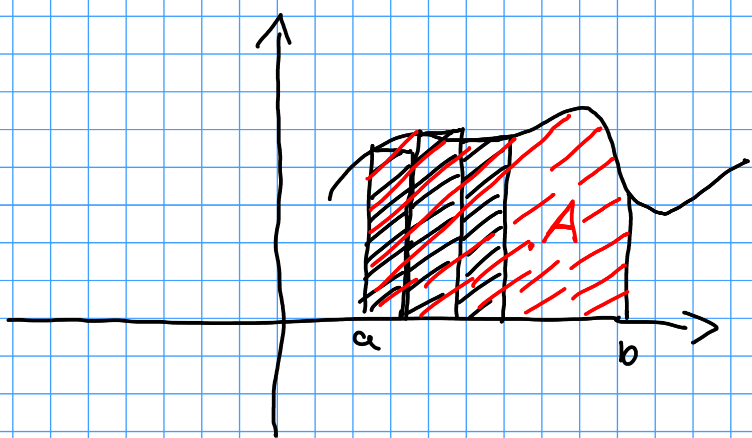
$$= 1 + 0\cdot x + (-1)/2 \cdot x^2 + 0\cdot x^3$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{1}{2}x^2}}$$

Allgemein $\qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k$

K3.3 Integration

Illustration



Frage: Was ist A?

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Antwort:

Falls $F'(x) = f(x)$

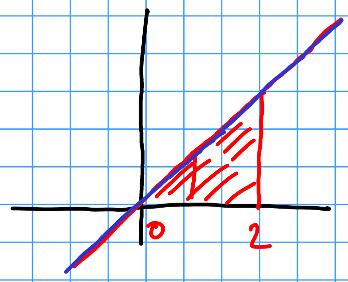
Dann $\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

F nennt man <u>Stammfunktion</u>

<u>Bsp:</u>

(1)



$f(x) = x$

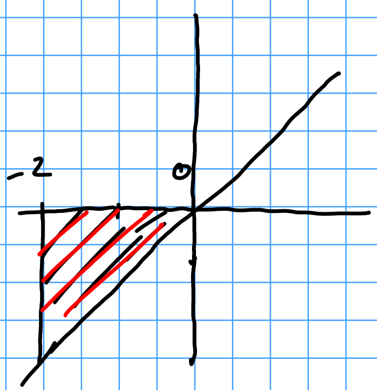
$F(x) = \frac{1}{2}x^2$

<u>Probe:</u> $F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^1 = x$ ✓

Dann $\int_0^2 x\,dx = F(2) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2$

$= \frac{1}{2} \cdot 4 = \underline{\underline{2}}$

(2)



$\int_{-2}^{0} x\,dx = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2}(-2)^2$

$= 0 - \frac{1}{2} \cdot 4$

$= -2$

<u>Schreibweisen</u>

Falls $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$ (unbestimmte Integral)

Bsp: $\int_0^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2$

$= 2$

$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$ z.B. $\frac{1}{2}x^2 + 3$

Wichtige Stammfunktionen

	$f(x)$	$F(x)$
$n \neq -1$	x^n	$\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$
	$\cos(x)$	$\sin(x)$
	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
	e^x	e^x
	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$

Bsp $\int x\,dx = \frac{1}{1+1}\cdot x^2 + c$

(in $\ln(x)$ nur positive Werte)

$\ln : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

Wie integriere ich beliebige Fkt.

Wie integriere ich beliebige Fkt.?

Regel 1 Linearität

$$\int \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\,dx = \alpha_1 \int f_1(x)\,dx + \alpha_2 \int f_2(x)\,dx$$

Bsp:
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cdot x^2 + \cos(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3x^2\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$$

$$= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$$

$$= 3\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot x^3\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[\sin(x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot \pi/2^3 - \frac{1}{3}(-\pi/2)^3\right) + \left(\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)\right)$$

$$= 3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{8}\right) + (1-(-1))$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi^3}{4} + 2}}$$

Regel 2 partielle Integration

Sei $G'(x) = g(x)$

$$\int_a^b f g\,dx = \left[f\cdot G\right]_a^b - \int_a^b f' G\,dx$$

Bsp:
$$\int x\cdot\cos(x)\,dx = x\cdot\sin(x) - \int 1\cdot\sin(x)\,dx$$
$$= x\cdot\sin(x) - (-\cos(x)) + c$$
$$= x\cdot\sin(x) + \cos(x) + c$$

Probe: $\left(x\cdot\sin(x)+\cos(x)+c\right)' = (x)'\cdot\sin(x) + x\cdot(\sin(x))' + (\cos(x))'$

$= \cancel{\sin(x)} + x\cdot\cos(x) - \cancel{\sin(x)}$

$= x\cdot\cos(x)$ ✓

(2) $\int_0^1 x\cdot e^x = \left[x\cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\,dx$

$= (1\cdot e^1 - 0\cdot e^0) - \left[e^x\right]_0^1$

$= e - (e^1 - e^0)$

$= e - e + 1 = \underline{\underline{1}}$

Regel 3 Substitution

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

Bsp: (1) $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x\cdot\sin(x^2)\,dx = \int_{(\sqrt{\pi})^2}^{(\sqrt{2\pi})^2} \cancel{x}\cdot\sin(u)\,\frac{1}{2\cancel{x}}\,du$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\Leftrightarrow \boxed{dx = \frac{1}{2x}\,du}$

$= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot\sin(u)\,du = \frac{1}{2}\cdot\int_{\pi}^{2\pi}\sin(u)\,du$

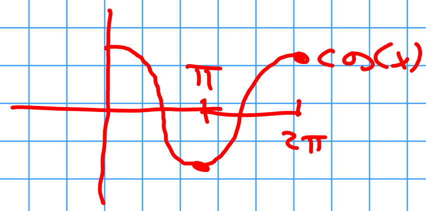
$= \frac{1}{2}\left[-\cos(u)\right]_{\pi}^{2\pi}$

$= -\frac{1}{2}\left[\cos(u)\right]_{\pi}^{2\pi}$

$= -\frac{1}{2}\left(\cos(2\pi) - \cos(\pi)\right)$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(1-(-1)\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}(2) = \underline{\underline{-1}}$$



② Unbestimmtes Integral

$$\int e^{2x+3}\,dx \underset{\boxed{\begin{array}{l} u = 2x+3 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ dx = \frac{1}{2}\,du \end{array}}}{=} \int e^{u}\,\frac{1}{2}\,du \,\Big|_{u=2x+3}$$

$$= \frac{1}{2}e^{u} + c \,\Big|_{u=2x+3} = \frac{1}{2}e^{2x+3} + c$$

<u>Probe:</u> $\left(\frac{1}{2}e^{2x+3}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot e^{2x+3}\cdot\cancel{2} = e^{2x+3}$ ✓