

Aufgabe 1

$$(a) \quad f(x) = 3 \cdot x^6 + \frac{1}{2} x^2 + x + 8$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^6)' + \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + (x)' + 8' \\ &= 3 \cdot 6 \cdot x^5 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 + 0 \\ &= \underline{\underline{18x^5 + x + 1}} \end{aligned}$$

$$(b) \quad f(x) = \sin(x) \cdot x + 2x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(x) \cdot x)' + (2x)' \\ &= (\sin(x))' \cdot x + \sin(x) \cdot (x)' + 2 \\ &= \cos(x) \cdot x + \sin(x) \cdot 1 + 2 \\ &= \underline{\underline{x \cos(x) + \sin(x) + 2}} \end{aligned}$$

(c)

$$f(x) = (x+1)^{12}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12 \cdot (x+1)^{11} \cdot (x+1)' \\ &= 12 \cdot (x+1)^{11} \cdot 1 = \underline{\underline{12 \cdot (x+1)^{11}}} \end{aligned}$$

$$(d) \quad f(x) = \cos(3x)$$

$$f'(x) = -\sin(3x) \cdot 3$$

$$(e) \quad f(x) = e^{x^2+3x}$$

$$f'(x) = e^{x^2+3x} \cdot (x^2+3x)' = \underline{\underline{e^{x^2+3x} \cdot (2x+3)}}$$

$$(f) f(x) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Aufgabe 2

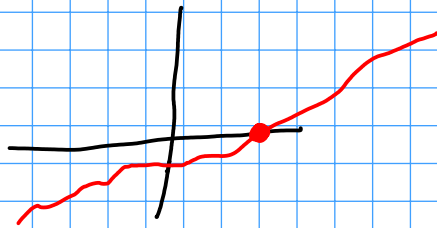
(Änderungsrate)

(i) wahr. Die Ableitung der Strecke ist die Geschwindigkeit

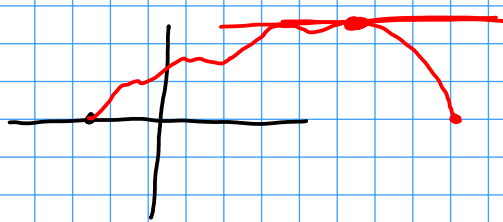
(ii) falsch $f(x) = 3x$ hat keinen Extremwert

(iii) falsch $f(x) = -x^2 + 2$ hat ein lok. Max aber kein lok. Min

(iv) wahr



(v) wahr (Mittelwertsatz)



irgendwo immer
waagerechte Tangente

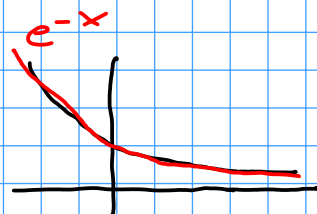
wahr

$$(vi) f(x) = \frac{1}{x}, f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Taylorpolynom hat selbe zweite
Ableitung am Entwicklungspunkt wie
Funktion

(vii) falsch $f(x) e^{-x}$ hat überall negative Ableitung
und $f(0) = e^0 = 1$ aber f hat keine Nst:



(VIII) falsch

$$f'(t) = -p(t) \cdot \frac{1}{10}$$

Aufgabe 3

$$(i) \quad f(x) = x^2 - 3x + 7$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f(2) = 4 - 6 + 7 = 5$$

$$f'(2) = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_{2,1}(x) &= f(2) + f'(2) \cdot (x-2) \\ &= 5 + 1 \cdot (x-2) = 5 + x - 2 = \underline{\underline{x+3}} \end{aligned}$$

$$(ii) \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f(1) = 1$$

$$f'(1) = -1$$

$$f''(1) = 2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_{1,2}(x) &= f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2} \cdot (x-1)^2 \\ &= 1 - 1 \cdot (x-1) + \frac{2}{2} \cdot (x-1)^2 \\ &= 1 - x + 1 + x^2 - 2x + 1 \\ &= x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$a + 2b = 60 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{60 - a}{2} = 30 - \frac{a}{2}$$

$$\text{maximiere } a \cdot b = a \left(30 - \frac{a}{2} \right)$$

$$= 30a - \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Flächeninhalt} = f(a) = 30a - \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Falls } f(a) \text{ lok. Max} \Rightarrow f'(a) = 0$$

$$f'(a) = 30 - a \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow a = 30$$

ist $a = 30$ lok. Max?

$$f''(a) = -1 \Rightarrow \text{lok. Max}$$

Also $a = 30$ und $b = 15$

Aufgabe 5

$$(a) f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

Extremwerte $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0, 1, -1$

$$f''(0) = -4 \Rightarrow \text{lok. Max}$$

$$f''(1) = f''(-1) = 8 \Rightarrow \text{lok. Min}$$

$$(0, 0) \text{ lok. Max}$$

$$(-1, -1) \text{ lok. Min}$$

$$(1, -1) \text{ lok. Min}$$

$$(b) f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6 \cdot x(x-1)$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

Extremwerte $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0, 1$

$$f''(0) = -6 \Rightarrow \text{lok. Max} \quad (0, 4)$$

$$f''(1) = 6 \Rightarrow \text{lok. Min} \quad (1, 3)$$

$$(c) f(x) = e^{-x^2-2x+1}$$

$$f'(x) = e^{-x^2-2x+1} \cdot (-2x-2)$$

$$f''(x) = e^{-x^2-2x+1} \cdot (-2x-2)^2 + e^{-x^2-2x+1} \cdot (-2)$$

$$= e^{-x^2-2x+1} (4x^2 + 8x + 4 - 2)$$

$$= e^{-x^2-2x+1} (4x^2 + 8x + 2)$$

Extremwerte

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2-2x+1} \cdot (-2x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x-2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 = 2x \quad \Leftrightarrow x = -1$$

$$f''(-1) = \underbrace{e^{\dots}}_{>0} \cdot (4 - 8 + 2) = e^{\dots} \cdot (-2) < 0$$

$$\Rightarrow \text{lok. Max } (-1, e^2)$$

Aufgabe 6

$$(a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 8$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

Extremwerte

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 12) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0, 4$$

$$f''(0) = -12 < 0 \Rightarrow \text{lok Max bei } (0, 8)$$

$$f''(4) = 12 > 0 \Rightarrow \text{lok Min bei } (4, -24)$$

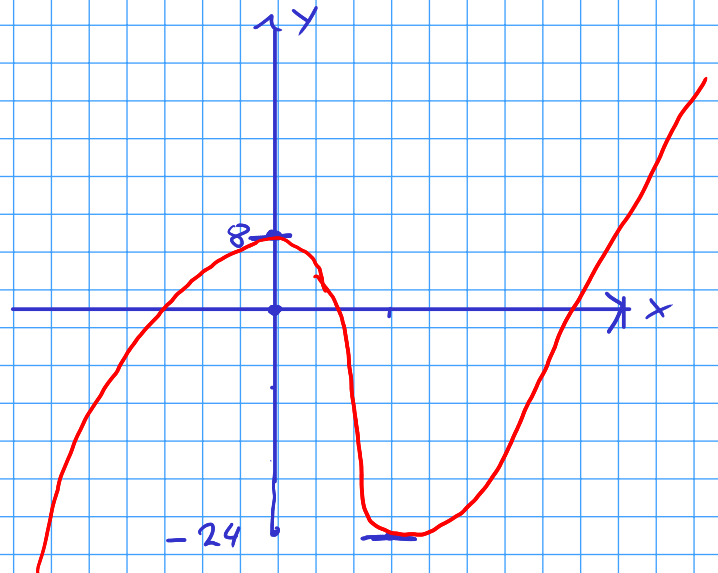
Keine Symmetrie

Nullstellen berechnen schwierig

Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 6x^2 + 8 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 8 = -\infty$$



$$(b) \quad \frac{x^2}{x+1} = f(x) \quad f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} \\ = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x) \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(2x+2)(x^2+2x+1) - (x^2+2x)(2x+2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2x^2 + 4x + 2 - (2x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 4x)}{(x+1)^4} = \frac{2x+2}{(x+1)^4}$$

Nst. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Schnitt mit y-Achse $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Pol $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

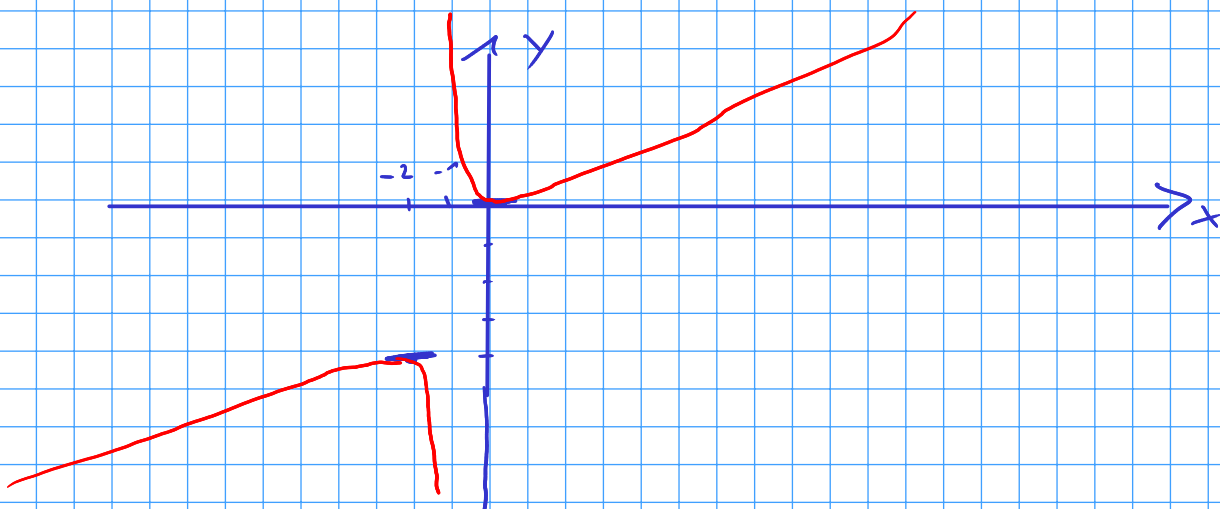
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$$

Extremwerte

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, -2$$

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{lok Min bei } (0,0)$$

$$f''(-2) = -2 < 0 \Rightarrow \text{lok Max bei } (-2, -4)$$



$$(c) f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = e^{-x}(1 - (x+1)) = -xe^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-1)$$

Extremwerte $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(0) = -1 \Rightarrow$ lok. Max bei $(0, 1)$

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x} = -\infty$$

Nullstelle bei $x = -1$

